

Concavidade e Convexidade

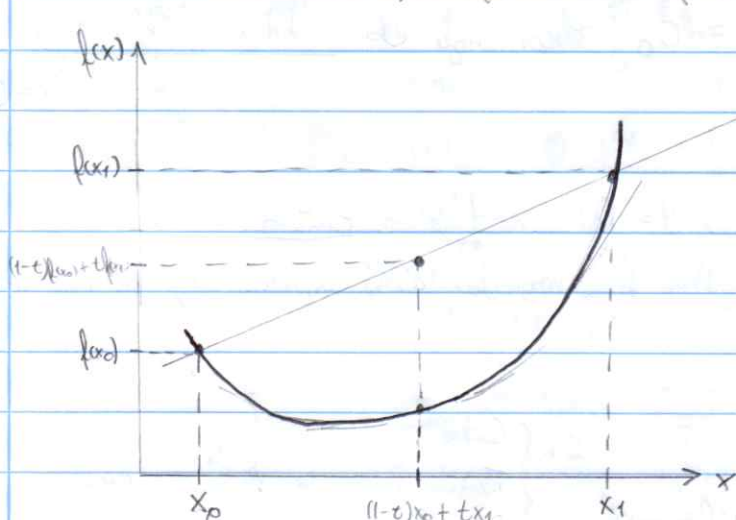
Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então:

f é **convexa** $\leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in I$ e $\forall t \in [0, 1]$ tiramos

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$$

Se $a < b$, $f'(a) < f'(b)$

$$f(E(x)) \leq E(f(x))$$



Linha secante da função convexa está acima do gráfico

Linhas tangentes da função convexa abaixo do gráfico

Uma função f diferenciável é convexa quando $f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$

Uma função é quase convexa quando

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq \max \{ f(x_0), f(x_1) \}, \quad t \in [0, 1]$$

Se f é quase convexa, há condição suficiente para que o ponto crítico seja solução para o problema de minimização. Funções quase convexas são geradas por transformações monotônicas de funções convexas e mantêm a propriedade ordinal de ter conjuntos de nível que delimitam regiões côncavas.

Uma função $F(x, y, z)$ diferenciável é convexa quando, $\forall (x_0, y_0, z_0)$,
 $F(x, y, z) \geq F(x_0, y_0, z_0) + \nabla F(x_0, y_0, z_0) [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)]$
 $F(x, y, z) \geq F(x_0, y_0, z_0) + F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$
 A expressão do lado direito é o plano tangente à $F(\cdot)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) que está sempre abaixo da função, $\forall$ ponto $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$

Concavidade e Convexidade

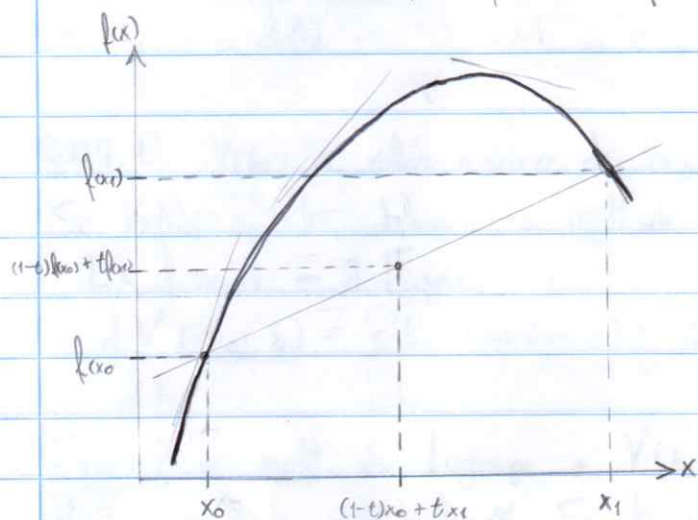
Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então:

f é **côncava** $\iff \forall x_0, x_1 \in I$ e $\forall t \in [0, 1]$ tivermos

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \geq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$$

Se $a < b$, $f'(a) > f'(b)$

$$f(E(x)) \geq E(f(x))$$



Linhas tangentes da função côncava acima do gráfico

Linhas secantes da função côncava está abaixo do gráfico

Uma função f diferenciável é côncava quando $f'(x_0) \geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Uma função é **quase côncava** quando

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \geq \min \{ f(x_0), f(x_1) \}, \quad t \in [0, 1]$$

Se f é quase côncava, há condição suficiente para que o ponto crítico seja solução para o problema de maximização. Funções quase côncavas são geradas por transformações monotônicas de funções côncavas e mantêm a propriedade ordinal de ter conjuntos de nível que delimitam regiões convexas.

Uma função $F(x, y, z)$ diferenciável é côncava quando, $\forall (x_0, y_0, z_0)$,
 $F(x, y, z) \leq F(x_0, y_0, z_0) + \nabla F(x_0, y_0, z_0) [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)]$

$$F(x, y, z) \leq F(x_0, y_0, z_0) + F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

A expressão do lado direito é o plano tangente à $F(\cdot)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) que está sempre acima da função, $\forall$ ponto $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$.