

10) Amostragem e Estimadores

População ou universo é o conjunto de todos os elementos que possuem determinada característica em comum. Vimos também que uma amostra é qualquer subconjunto não vazio e menor do que a população. Para que possamos fazer inferência para a população, é necessário que a amostra tenha sido obtida de acordo com certos critérios.

Dada uma população com m elementos, denominamos amostragem aleatória simples ao processo de obter um subconjunto de n elementos dessa população, conduzido de tal forma que cada uma das $\binom{m}{n}$ combinações de elementos terá igual probabilidade de ser selecionada, estando implícito que a amostragem é feita sem reposição.

A probabilidade de um elemento ser escolhido, em qualquer um dos n sorteios feitos para constituir a amostra é, a priori, igual a $1/m$. Podemos dizer que a amostragem aleatória simples é aquela na qual todos os elementos da população têm igual prob. de serem selecionados.

Por definição, a amostragem aleatória é aquela em que:

I) As funções de densidade associadas às diferentes observações da amostra são todas iguais à função de densidade da população, isto é,

$$f_1(X) = f_2(X) = \dots = f_n(X) = f(X)$$

II) As diferentes observações da amostra são v.a.'s independentes

Então, o valor da densidade de probabilidade de obter uma determinada amostra $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(X_1) f(X_2) \dots f(X_n) = \prod_{i=1}^n f(X_i)$$

Se a população for infinita, as variáveis associadas às várias observações de uma amostra aleatória simples são independentes e têm todas a mesma distribuição, igual à da população.

→ Parâmetro e Estimador

Como normalmente não conhecemos os valores de de parâmetros como média (μ) e variância (σ^2), obtemos as respectivas estimativas a partir dos valores observados em uma amostra.

Consideremos uma amostra de n elementos de uma população cuja média é $\mu = E(X)$. A partir dos valores observados na amostra,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

A média da amostra é um estimador de μ . Em geral, o estimador de um parâmetro da população é uma função dos valores observados em uma amostra dessa população.

Chamamos de estimativa ao valor do estimador obtido com base em determinada amostra.

Para analisar as propriedades dos estimadores baseados em amostras aleatórias simples, deve-se distinguir dois casos:

I) a população é infinita ou foi feita amostragem com reposição de uma população finita; neste caso as observações de uma amostra são independentes.

II) a população é finita e foi feita amostragem sem reposição; neste caso as observações não são independentes.

→ A média e a variância de $\bar{X}$

Seja X uma variável aleatória de população infinita, com média $\mu = E(X)$ e variância $V(X) = \sigma^2 = E(X - \mu)^2$. Dada uma amostra aleatória simples de n elementos dessa variável, temos

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} X_1 + \dots + \frac{1}{n} X_n$$

Já vimos que os diferentes X_i são v.a.'s com distribuição igual à população:

$$E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = E(X) = \mu$$

$$V(X_1) = V(X_2) = \dots = V(X_n) = V(X) = \sigma^2$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu \quad E(\bar{X}) = \mu$$

Lembrando que as observações da amostra são independentes,

$$V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(x_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Esses resultados são igualmente válidos para a média de uma amostra de uma população finita, onde se procede à amostragem com reposição.

Consideremos, a seguir, o caso de uma população finita (com m elementos) do qual tiramos amostras de n elementos, sem reposição.

A média da população é

$$\mu = E(X) = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m}$$

Neste caso, é preferível definir a variância de X como

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu)^2}{m - 1}$$

Da mesma maneira que no caso de uma população infinita, temos $E(\bar{X}) = \mu$. Entretanto, como as observações da amostra NÃO são independentes, demonstra-se que:

$$V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S^2}{n} \left(1 - \frac{n}{m} \right)$$

"correção para população finita"

→ Estimador Não-Tendencioso

Por definição, a é um estimador não-tendencioso (não-viado, não-viciado ou imparcial) do parâmetro α da população se

$$E(a) = \alpha$$

A diferença $E(a) - \alpha$ é denominada viés ou tendenciosidade do estimador. $\bar{X}$ e S^2 são estimadores não-tendenciosos de μ e σ^2 .

Seja X uma variável aleatória contínua com média μ e variância σ^2 . Demonstra-se que, se X tem distribuição normal, $\bar{X}$ tem distribuição normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$. Se a distribuição de X não é normal, de acordo com o teorema do limite central, a distribuição da média $\bar{X}$ se torna aproximadamente normal, com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, à medida que cresce o tamanho (n) da amostra.

→ Estimador de Variância Mínima

A não-tendenciosidade é uma qualidade desejável para os estimadores, mas insuficiente como critério para selecionar um estimador, já que existem infinitos estimadores não-tendenciosos de μ .

Outra qualidade desejável é que os estimadores sejam eficientes, isto é, que tenham variância mínima.

Dados dois estimadores não-tendenciosos, a_1 e a_2 , do parâmetro α . Por definição a eficiência relativa de a_2 , em comparação com a_1 , é igual a $V(a_1)/V(a_2)$.

Em geral, dada uma v.a. X de média μ e variância σ^2 , pode-se demonstrar que a média aritmética de uma amostra aleatória de n observações é, entre os estimadores lineares não tendenciosos, o estimador de variância mínima.

→ Estimadores de Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados consiste em adotar, como estimador, a função que minimiza a soma dos quadrados dos desvios entre valores estimados e valores observados na amostra. A média aritmética é um estimador de mínimos quadrados.

Outra aplicação do método dos mínimos quadrados é na obtenção de um estimador $\hat{p}$ do parâmetro p .

$$\hat{p} = \frac{\sum X}{n}$$

→ Estimadores de Máxima Verossimilhança

O método de máxima verossimilhança consiste em adotar, como estimativas dos parâmetros, os valores que maximizam a probabilidade de a amostra observada ter sido obtida. Para obter estimadores de máxima verossimilhança, é necessário conhecer a distribuição da variável em estudo.

Se X tem distribuição normal, $\bar{X}$ é, também, um estimador de máxima verossimilhança. Em contraste,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n} = s^{*2}$$

que é o estimador de máxima verossimilhança da variância. Este é um estimador tendencioso, já que o estimador não-tendencioso é

$$s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \neq s^{*2}$$

→ Propriedades Assintóticas dos Estimadores

Seja a_n o estimador de um parâmetro α , obtido com base em uma amostra com n observações. Em geral, a_n é uma variável aleatória cuja distribuição é caracterizada pela função de densidade $f(a_n)$, com média $E(a_n)$ e variância $V(a_n) = E[a_n - E(a_n)]^2$.

A teoria assintótica dos estimadores se destina a estabelecer o comportamento dessas seqüências quando n tende ao infinito.

Denominamos esperança assintótica de a_n o valor $\lim_{n \rightarrow \infty} E(a_n)$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} E(a_n) = \alpha$, dizemos que a_n é um estimador assintoticamente não-tendencioso.

Define-se variância assintótica como

$$n^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\sqrt{n} [a_n - E(a_n)]\}^2$$

Para o estimador $\bar{X}$ temos:

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X} - \mu)^2 = \sigma^2/n$$

$$E[\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)]^2 = \sigma^2$$

E a variância assintótica de $\bar{X}$ é

$$n^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} E [\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)]^2 = \sigma^2/n$$

* Obs. 1: A média ($\bar{X}$) é um estimador de μ assintoticamente mais eficiente do que a mediana (D).

Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias $\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n$ converge em probabilidade para uma constante α se, para qualquer $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|a_n - \alpha| > \varepsilon) = 0,$$

indicando-se $a_n \xrightarrow{P} \alpha$ ou $\text{plim } a_n = \alpha$, que se lê "o limite em probabilidade de a_n é igual a α ".

Dada uma amostra de n observações, a_n é um estimador consistente do parâmetro α da população se $\text{plim } a_n = \alpha$.

Dizemos que uma série de variáveis aleatórias $\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n$ converge em média quadrática para uma constante α se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(a_n - \alpha)^2 = 0$$

* Obs. 2: O Teorema de Chebyshev diz que, em um conjunto de dados, a probabilidade do desvio de um deles ser maior do que K vezes o desvio-padrão é menor que $1/K^2$.

$$P(|X - \mu| \geq K) \leq \frac{\sigma^2}{K^2}$$

A convergência em média quadrática é condição suficiente para que tenhamos convergência em probabilidade. Isto é, para que $\text{plim } a_n = \alpha$ é suficiente que $\lim_{n \rightarrow \infty} E(a_n - \alpha)^2 = 0$. Para isso, é suficiente que $\lim_{n \rightarrow \infty} V(a_n) = 0$ e $E(a_n) = \alpha$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} [E(a_n)] = \alpha$.

Conclui-se que um estimador não-tendencioso ou assintoticamente não-tendencioso é consistente se o limite da sua variância, quando o

tamanho da amostra tende a infinito, e igual a zero.

Obs3.: Propriedades da Convergência em Probabilidade

Se $p \lim a = \alpha$ e $F(a)$ é uma função contínua de a

$$p \lim F(a) = F(\alpha)$$

$$p \lim (a^2) = (p \lim a)^2$$

$$p \lim (a^{-1}) = (p \lim a)^{-1}, \text{ se } p \lim a \neq 0$$

$$p \lim F(a, b) = F(\alpha, \beta)$$

$$p \lim (ab) = (p \lim a)(p \lim b)$$

$$p \lim (a+b) = p \lim a + p \lim b$$

→ Amostragem Estratificada

Para obter uma amostra estratificada, primeiro dividimos a população em estratos e depois obtemos, em cada estrato, uma amostra aleatória simples. Se a população for dividida em K estratos e se m_i ($i=1, 2, \dots, K$) é o nº de elementos no i -ésimo estrato, o nº total de elementos na população é $M = \sum_{i=1}^K m_i$.

Se selecionarmos, ao acaso, n_i ($n_i < m_i$) elementos em cada estrato, o tamanho da amostra estratificada será $N = \sum_{i=1}^K n_i$.

Sejam X_{ij} ($j=1, \dots, n_i$) os valores amostrados no i -ésimo estrato.

A média desses valores será $\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$. Podemos afirmar que $\bar{X}_i$ é um estimador não-tendencioso de μ_i , $E(\bar{X}_i) = \mu_i$.

A soma dos valores de X no i -ésimo estrato da população é igual a $m_i \mu_i$, e a soma em toda população é $\sum m_i \mu_i$.

Seja $\mu = E(X)$, então

$$\mu = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^K m_i \mu_i$$

Se, para cada estrato, a relação entre o tamanho da amostra aleatória simples (n_i) e o nº de elementos do estrato (m_i) é constante e igual à relação entre tamanho da amostra (N) e nº de elementos

da população (M), isto é, se

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} = \dots = \frac{n_k}{m_k} = \frac{N}{M}$$

diz-se que foi feita uma amostragem estratificada proporcional. Daí obtém-se

$$\frac{m_i}{M} = \frac{n_i}{N} \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j X_{ij}$$

ou seja, para uma amostra estratificada proporcional, o estimador da média da população é dado pela média aritmética dos valores amostrados.

$$C = \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \right) / N$$

11) Intervalo de Confiança

Resumindo: X é uma v.a. de média μ e desvio padrão σ

X é uma v.a. com distribuição normal, se X é normal

$\bar{X}$ é aproximadamente normal, se X não é normal e n suficientemente grande

$\bar{X}$ tem média μ e desvio-padrão

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left\{ \begin{array}{l} \text{infinita ou} \\ \text{com repetição} \end{array} \right. \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{m}} \left\{ \begin{array}{l} \text{finita e} \\ \text{sem repetição} \end{array} \right.$$

Supõe-se o valor de σ conhecido e desejamos obter uma estimativa de μ e um indicador da precisão dessa estimativa. $\bar{X}$ é um estimador não-tendencioso de μ e $Z = (\bar{X} - \mu) / \sigma_{\bar{X}}$ tem distribuição normal reduzida. É estabelecida a prob. C , sendo Z_0 o valor da variável normal reduzida tal que

$$P(-Z_0 < Z < Z_0) = C$$

$$P\left(-Z_0 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} < Z_0\right) = C$$

$\Downarrow$

$$P(\bar{X} + Z_0 \sigma_{\bar{X}} > \mu > \bar{X} - Z_0 \sigma_{\bar{X}}) = C$$

Fazendo $C = 0,95$, temos $Z_0 = 1,96$ e

$$P(\bar{X} + 1,96 \sigma_{\bar{X}} > \mu > \bar{X} - 1,96 \sigma_{\bar{X}}) = 0,95$$

isto é, com grande nº de amostras, os intervalos entre $\bar{X} \pm 1,96 \sigma_{\bar{X}}$ incluirão μ em 95% dos casos. Entretanto, para uma única amostra, a prob. do intervalo incluir μ será 0 ou 1. Por isso é errado afirmar que $P(12 < \mu < 22) = 0,95$; sendo $P(12 < \mu < 22)$ igual a zero ou um.

O intervalo de confiança de 100C% para μ é

$$\bar{X} - Z_0 \sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + Z_0 \sigma_{\bar{X}}$$

Ao determinar o IC para um parâmetro, estamos fazendo uma estimativa por intervalo. O tamanho do IC dá uma medida de precisão da estimativa, e em geral utiliza-se a estimativa $S\bar{x}$ de $\sigma\bar{x}$.

→ Quando o valor de σ é desconhecido

$$s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{n-1} \text{ é um estimador não-tendencioso de } \sigma^2$$

O valor $(n-1)$ é denominado graus de liberdade e está associado a s^2 , e a precisão de s^2 varia com o n° de g.l.'s. A medida que n aumenta, aumenta as g.l.'s e a distribuição de s^2 tende a se concentrar em torno de σ^2 . A estimativa da variância de $\bar{X}$ é dada por

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n} \begin{cases} \text{infinita} \\ \text{el/reposição} \end{cases} \quad S_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n} \left(\frac{1-n}{m} \right) \begin{cases} \text{finita} \\ \text{s/reposição} \end{cases}$$

Associa-se a $S\bar{x}$ o mesmo n° de graus de liberdade.

Sendo σ^2 desconhecido, pode-se escrever

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S\bar{x}}$$

A v.a. t , assim definida, tem distribuição t associada a $(n-1)$ graus de liberdade. Quando n é bastante grande, a distribuição t é aprox. igual à distribuição normal reduzida.

Genericamente, na distribuição para $n-1$ graus de liberdade, um valor crítico t_0 , tal que

$$P(-t_0 < t < t_0) = C$$

$$P\left(-t_0 < \frac{\bar{X} - \mu}{S\bar{x}} < t_0\right) = C$$

⇓

$$P(\bar{X} - t_0 S\bar{x} < \mu < \bar{X} + t_0 S\bar{x}) = C$$

Se fossem estabelecidos intervalos dessa maneira para um grande n° de amostras em 100 C% das vezes os intervalos incluiriam μ .

→ Intervalo de Confiança para uma proporção

Considera-se uma população na qual uma proporção p de seus elementos apresenta certa característica (X dos n elementos). Vimos que $\hat{p} = X/n$ é o estimador de mínimos quadrados e de máxima verossimilhança de p . Se $np > 5$ e $nq > 5$, a variável

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

tem, aprox., distribuição normal reduzida.

Como $E(X) = np$ e $V(X) = npq$, temos

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = p \quad ; \quad V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

$$\hat{\sigma}(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad , \quad \hat{q} = 1 - \hat{p}$$

$$I_c \Rightarrow P\left(\hat{p} - z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = C$$

Com duas condições:

1º) Se fizermos amostragem sem reposição de uma população finita, para que X tenha distribuição aprox. binomial, a amostra deve constituir uma fração bastante pequena da população;

2º) Para que $\hat{p}$ tenha distribuição aprox. normal, devemos ter $np > 5$ e $nq > 5$.

→ Determinação do tamanho da amostra necessária

Seja $2e$ a amplitude do intervalo de confiança para um parâmetro. No caso do IC para μ , com σ conhecido, temos $e = z_0 \sigma_{\bar{x}}$. A variável do estimador $\bar{X}$ é inversamente proporcional ao tamanho da amostra, $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

$$e^2 = \frac{z_0^2 \sigma^2}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{z_0^2 \sigma^2}{e^2}$$

Esta expressão dá o menor tamanho que pode ter uma amostra para que a estimativa μ apresente, ao nível de confiança, um desvio igual ou inferior a e .

Se a população é finita com m elementos e fazemos amostragem sem reposição, temos $\sigma_{\bar{x}} = \frac{S^2}{n} \left(1 - \frac{n}{m}\right)$

$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{m}}, \quad n_0 = \frac{Z_0^2 S^2}{e^2}$$

Se o valor de σ ou de S é desconhecido, mas dispomos de s , a semi-amplitude do intervalo de confiança

$$e = t_0 S_{\bar{x}}$$

se a população é infinita ou se fazemos amostragem com reposição, temos

$$S_{\bar{x}} = S^2/n$$

$$n = \frac{t_0^2 s^2}{e^2}$$

Se a população é finita e fazemos amostragem sem reposição, temos

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n} \left(1 - \frac{n}{m}\right)$$

No caso das estimativas de uma proporção, a semi-amplitude do intervalo de confiança, é

$$e = Z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$n = \frac{Z_0^2 \hat{p}\hat{q}}{e^2}$$

Deve-se lembrar que esse resultado só é válido se $np > 5$, $nq > 5$, e, se for sem reposição de uma população finita, só é válido se a amostra é uma fração bastante pequena da população. Se não dispusermos de uma prévia de p , podemos utilizar $\hat{p} = 0,5$ que maximiza n .

12) Teste de Hipóteses

Vamos estabelecer a hipótese de nulidade indicada por H_0 e a hipótese alternativa H_A . Não é possível estabelecer uma regra que permita decidir sobre H_0 sem estar sujeito a erro, entretanto, podemos calcular a probabilidade da decisão tomada estar errada.

Denominamos erro tipo **I** ao erro que consiste em rejeitar H_0 , dado que H_0 é verdadeira. Denominamos nível de significância do teste (α), a probabilidade de cometer erro tipo I.

Denominamos erro tipo **II** ao erro que consiste em aceitar H_0 , dado que H_0 é falsa. A probabilidade de cometer erro tipo II é indicada por β . O valor $1 - \beta$ que é a probabilidade de rejeitar H_0 , dado que H_0 é falsa, é chamada poder do teste.

Seja X uma v.a. com distribuição normal de média μ e variância conhecida σ^2 . Para testar a hipótese de que a média μ da distribuição tem um valor especificado μ_0 , $H_0: \mu = \mu_0$, contra a hipótese alternativa de que há outro valor μ_1 , isto é, $H_A: \mu = \mu_1$, com $\mu_1 > \mu_0$. Estabelece-se o nível de significância, no caso, 5%. Em seguida, obtemos uma amostra de n observações da variável X e calculamos a média de $\bar{X}$; depois calcula-se o valor do ponto crítico C , tal que

$$P(\bar{X} \geq C \mid \mu = \mu_0) = \alpha$$

$$P\left(Z > \frac{C - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = \alpha$$

Se Z_0 é o valor da variável normal reduzida, tal que $P(Z > Z_0) = \alpha$

$$\frac{C - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = Z_0$$

$$C = \mu_0 + Z_0 \sigma_{\bar{X}}$$

Comparamos então $\bar{X}$ com C e rejeitamos H_0 se $\bar{X} \geq C$, isto é

$$\bar{X} \geq \mu_0 + Z_0 \sigma_{\bar{X}}$$

$$\text{ou } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \geq Z_0$$

Todo o procedimento usual para testar H_0 contra H_A consiste em, depois de obtido $\bar{X}$, calcular $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$ e rejeitar $H_0: \mu = \mu_0$ ao nível de significância α , para todo $Z \geq Z_0$.

Se tivermos $H_0: \mu = \mu_0$ e $H_A: \mu = \mu_1$ com $\mu_1 < \mu_0$, a região de rejeição é $X \leq C$. Calcula-se Z e rejeita H_0 se $Z < -Z_0$. Sendo α o nível de significância, Z_0 é o valor da variável normal reduzida tal que $P(Z < -Z_0) = P(Z > Z_0) = \alpha$ ~157~

→ Hipótese Alternativa Composta

A hipótese da nulidade, quantitativamente, é necessariamente uma igualdade. Porém, são muito mais frequentes hipóteses alternativas do tipo $H_A: \mu \neq \mu_0$, ou do tipo $H_A: \mu < \mu_0$ ou $H_A: \mu > \mu_0$. Nestes casos, a hipótese alternativa é uma hipótese alternativa composta.

Se a hipótese alternativa é do tipo $H_A: \mu \neq \mu_0$, fazemos um teste bilateral, rejeita-se H_0 para $\bar{X}$ muito maior ou menor do que μ_0 .

Se a hipótese alternativa é do tipo $H_A: \mu < \mu_0$ ou do tipo $H_A: \mu > \mu_0$, fazemos um teste unilateral.

O procedimento para testar a hipótese $H_0: \mu = \mu_0$, com base em uma amostra aleatória de n observações da variável X , que tem distribuição normal com variância σ^2 conhecida. Seja α o nível de significância adotado, então:

1) Calculamos
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$$

2) Da tabela obtemos o valor crítico Z_0 tal que

a) $P(Z > Z_0) = \alpha/2$, se o teste for bilateral;

b) $P(Z > Z_0) = \alpha$, se o teste for unilateral.

- 3) Compara-se o valor calculado de Z com o valor crítico
- a) $|Z| \geq Z_0$ (bilateral)
 - b) $Z \geq Z_0$ ($\mu > \mu_0$)
 - c) $Z \leq -Z_0$ ($\mu < \mu_0$)
- } Significativa ao nível α
} Rejeita-se a hipótese de nulidade

Obs.: A escolha se o teste será bilateral ($H_A: \mu \neq \mu_0$), unilateral à direita ($H_A: \mu > \mu_0$) ou unilateral à esquerda ($H_A: \mu < \mu_0$) tem de ser feita com base em outras informações que não os dados para efetuar o teste.

Quando testamos H_0 contra $H_A: \mu \neq \mu_0$, não rejeita-se H_0 se

$$|Z| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \right| < Z_0$$

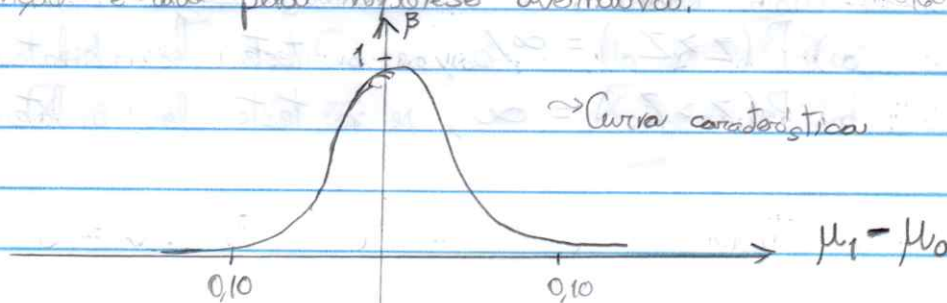
$$-Z_0 < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} < Z_0$$

$$\bar{X} - Z_0 \sigma_{\bar{X}} < \mu_0 < \bar{X} + Z_0 \sigma_{\bar{X}}$$

Ao testar $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_A: \mu \neq \mu_0$, ao nível de significância de $100\alpha\%$, rejeitamos a hipótese da nulidade se, e somente se, o intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para μ não incluir o valor de μ_0 .

→ Curva característica de operação de um teste

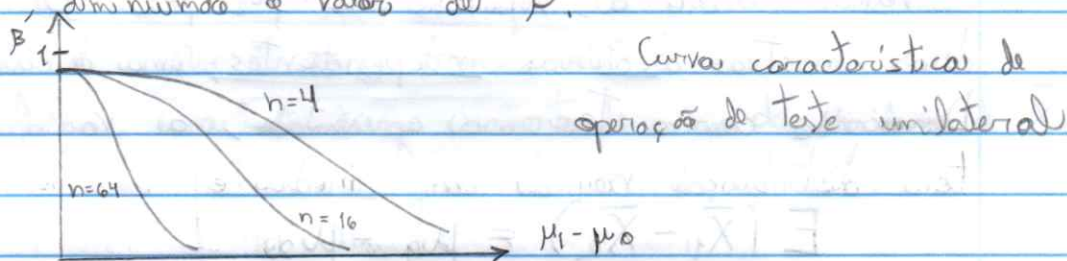
Quando a hipótese alternativa é composta, β (probabilidade de cometer um erro tipo II) não é um valor único, mas uma função do valor do parâmetro, que é a probabilidade p ou a média μ . O domínio dessa função é dado pela hipótese alternativa.



Para, se obter um teste com maior poder $(1-\beta)$, há duas ações: fixar um valor maior como nível de significância ou aumentando o tamanho da amostra.

Se aumentarmos o nível de significância (α) do teste, o valor Z_0 será menor e será menor o intervalo de valores de $\bar{X}$ dentro do qual não rejeitamos H_0 ; os valores de β , portanto, serão menores para qualquer valor de μ_1 e a curva característica de operação do teste será mais baixa. Nesse caso o aumento do poder do teste foi conseguido aumentando a probabilidade de cometer erro Tipo I.

Se aumentarmos o tamanho da amostra (n) , o valor de $\sigma_{\bar{X}}$ diminui, aumentando o valor de $\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$ e fazendo com que o intervalo de Z fique mais afastado da média da distribuição, diminuindo o valor de β .



Obs 1.: Se $\beta = \phi(\alpha)$ é uma função decrescente e convexa em relação à origem, o nível de significância ótimo α^* será tanto menor quanto maior for θ (probabilidade a priori de H_0 ser verdadeira) e quanto maior for o custo de cometer erro Tipo I em comparação com o custo de cometer erro Tipo II.

→ Teste de hipóteses sobre o valor de μ quando σ é desconhecido

Se o valor de σ é desconhecido, utilizamos $S_{\bar{X}}$ em lugar de $\sigma_{\bar{X}}$, obtendo
$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}}$$
, que segue a distribuição

ção t de Student com $n-1$ graus de liberdade.

→ Teste de hipóteses sobre o valor da diferença entre duas médias nas casos em que variâncias são conhecidas

De acordo com o Teorema, a variável resultante de uma combinação linear de variáveis com distribuições normais tem, também, distribuição normal, ou seja, a variável $Y = \sum_{i=1}^k c_i X_i$ tem distribuição normal. Da mesma forma, se X tem distribuição normal, a média $\bar{X}$ de uma amostra aleatória com n observações dessa variável também tem distribuição normal.

$$\text{Se } Y = \sum c_i X_i,$$

$$\mu_Y = E(Y) = \sum c_i E(X_i)$$

$$V(Y) = \sum c_i^2 V(X_i), \text{ se } X_i \text{ são variáveis independentes}$$

Vamos testar a hipótese $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \theta$ com base em duas amostras aleatórias independentes, uma de cada população. De acordo com o Teorema apresentado, a variável $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ tem distribuição normal com média e variância:

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2)$$

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2)}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \theta}{\sqrt{V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2)}} \text{ que tem}$$

sob H_0 , distribuição normal reduzida.

O procedimento de teste de hipótese apresentado continua válido quando as variáveis X_1 e X_2 não têm distribuições normais mas as amostras são bastante grandes para que as distribuições sejam aproximadamente normais de acordo com o Teorema do limite central.

A hipótese da nulidade é, em geral, do tipo $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \theta$ isto é, $\theta = 0$. Se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, a hipótese da nulidade

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ corresponde à afirmativa de que as duas variáveis possuem a mesma distribuição, ou seja, de que as duas amostras se originam de uma única população.

→ Teste de hipóteses sobre o valor da diferença entre duas médias com variâncias desconhecidas

Supõe-se que as variâncias das populações não desconhecidas, porém supostas iguais. Vamos testar $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ com base em duas amostras aleatórias independentes. Sabemos que

$$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \sigma^2$$

Uma estimativa não-tendenciosa de σ^2 , comum às duas populações, é:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Da mesma forma, uma estimativa não-tendenciosa da variância de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

$$\hat{V}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) s^2$$

Se X_1 e X_2 tem distribuições normais de mesma variância, a variável

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) s^2}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) s^2}}$$

tem distribuição t com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade.

Para testar a hipótese, deve-se primeiro calcular s^2 para calcular o t calculado. Da Tabela t , obtém-se o valor crítico t_0 para $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade, tal que $P(t > t_0) = \alpha/2$ (bilateral) ou $P(t > t_0) = \alpha$ (unilateral). Por fim, compara-se o valor de t com t_0 .

→ Testes sobre Proporções

Se estivermos interessados na comparação de duas proporções testaremos $H_0: p_1 - p_2 = 0$, onde p_1 e p_2 são as proporções de elementos com determinada característica, em duas populações. Considera-se cada variável X com distribuição aprox. normal com média $\mu = np$ e $\sigma^2 = npq$. Conclui-se que $\hat{p} = \frac{X}{n}$ tem distribuição aprox. normal com média $E(\hat{p}) = p$ e variância $V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$.

A variável $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ tem distribuição aprox. normal com média $p_1 - p_2$. Além disso, se as amostras são independentes, temos:

$$V(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$$

E sob H_0 , temos:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}}$$

Comparando o valor calculado de Z com o valor crítico, a um dado nível de significância, decidimos sobre a rejeição ou não rejeição de H_0 .

Já que utilizamos a aproximação normal da binomial, devemos fazer a correção de continuidade que consiste em, antes de obter o valor da diferença entre $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ e $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$, subtrair 0,5 do numerador da proporção maior e adicionar 0,5 ao numerador da proporção menor.