

Processos Estocásticos

$Y_t \Rightarrow$ observação no tempo t (t unidade discreta de tempo)

$Y_{t-1} \Rightarrow$ lag ou defasagem temporal

$Y_T \Rightarrow$ última observação

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \rightarrow \text{modelo estático}$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + u_t$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + u_t \quad \text{AR}(1)$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + \beta_4 X_{t-1} + u_t$$

$\rightarrow$ Modelo de defasagem distribuída autoregressiva

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \text{TIME} + u_t \rightarrow \text{modelo estático}$$

Modelo dinâmico: deve considerar alguma defasagem (tempo no relacionamento das variáveis)

Série estacionária: média e variâncias constantes

Processo estocástico: realização de uma variável aleatória. Cada observação de uma série temporal é uma variável aleatória.

$$X \sim N(0, \gamma_x^2)$$

$$E(x) = \sum x/n = 0 = \bar{x}$$

$$Y \sim N(0, \gamma_y^2)$$

$$\text{Var}(x) = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x^2}{n} = E(x^2) = \gamma_x^2$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] = \gamma_{xy}$$

$$\gamma_{xx} = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})] = E(x^2) = \gamma_x^2$$

	X	Y	Z
X	γ_x^2	γ_{xy}	γ_{xz}
Y		γ_y^2	γ_{yz}
Z			γ_z^2

2

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)} \sqrt{V(y)}} = \frac{\gamma_{xy}}{\sqrt{\gamma_{xx} \gamma_{yy}}}$$

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$E(Y_t) = E(\mu) + E(\varepsilon_t) = \mu \quad \boxed{E(Y_t) = \mu}$$

$$Y_t = \beta \text{ TIME} + \varepsilon_t$$

$$E(Y_t) = \beta \cdot E(\text{TIME}) + E(\varepsilon_t) = \beta \text{ TIME}$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_{t-j} - \mu_{t-j})]$$

$$\text{cov}(Y_7, Y_8) = E[(Y_7 - M_7)(Y_8 - M_8)]$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_t) = E[(Y_t - \mu_t)^2]$$

se $\mu_0 = 0$

$$\text{cov}(Y_t, Y_t) = E(Y_t^2) = V(Y_t)$$

$$\rho_{Y_{t-j}, Y_t} = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-j})}{\sqrt{V(Y_t)} \sqrt{V(Y_{t-j})}}$$

Condições para Estacionaridade

$$1) V(Y_t) < \infty$$

$$2) E(Y_t) = \mu \quad \forall t \quad (\text{média constante})$$

$$3) E[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] = \gamma_j$$

	Y_t	Y_{t-1}	Y_{t-2}
Y_t	γ_0	γ_1	γ_2
Y_{t-1}	γ_1	γ_0	γ_1
Y_{t-2}	γ_2	γ_1	γ_0

3

	Y_t	Y_{t-1}	Y_{t-2}
Y_t	1	ρ_1	ρ_2
Y_{t-1}	ρ_1	1	ρ_1
Y_{t-2}	ρ_2	ρ_1	1

$$\rho_{Y_t, Y_{t-j}} = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-j})}{\sqrt{V(Y_t)V(Y_{t-j})}}$$

$$\rho_{Y_t, Y_{t-1}} = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-1})}{V(Y_t)}$$

21/03

Ruído branco: média zero, variância constante e ausência de memória

$$E(Y_t) = 0 \quad \forall t \quad E(Y_t^2) = V(Y_t) = \sigma^2 \quad \forall t \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{estacionário} = \text{homos.} \\ E(Y_t Y_{t-j}) = 0 \quad \forall t, j \end{array} \right.$$

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2), \quad Y_t \text{ estacionário}$$

Ex: $Y_t = 5 + 0,3 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$E(Y_t) = E(c) + \phi E(Y_{t-1}) + 0 = c + \phi E(Y_{t-1})$$

$$E(Y_t) = c + \phi E(Y_t)$$

$$\mu = c + \phi \mu$$

$$\mu = \frac{c}{1-\phi}$$

$E(Y_{t-1}) = E(Y_t) = \mu \Rightarrow$ processo estacionário

$$V(c+x) = V(x)$$

$$V(Y_t) = V(c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t) = V(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t)$$

Podemos supor $c=0$ (constante) $\rightarrow \mu=0 \rightarrow V(Y_t) = E(Y_t^2)$

$$V(Y_t) = E[(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t)^2] = E[\phi^2 Y_{t-1}^2 + 2\phi Y_{t-1} \varepsilon_t + \varepsilon_t^2]$$

$$V(Y_t) = \phi^2 E(Y_{t-1}^2) + 2\phi E(Y_{t-1} \varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2)$$

$$V(Y_t) = \phi^2 V(Y_{t-1}) + 2\phi \cdot 0 + \sigma^2$$

$E(\varepsilon_t Y_{t-1}) = 0 \Rightarrow$ erro com qualquer coisa $t-1$ da correlação 0.

$$V(Y_t) = \phi^2 V(Y_{t-1}) + \sigma^2$$

$$(1-\phi^2) V(Y_t) = \sigma^2$$

$$V(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

tilibra

Processo Estacionário Regressivo de 1ª Ordem

$$V(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

$$|\phi| < 1$$

$$-1 < \phi < 1$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] = \gamma_j$$

$$\gamma_j = \frac{\phi^j}{1-\phi^2} \cdot \sigma^2$$

tende de $-\infty$ a ∞

Divide-se a covariância pela variância:

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{\phi^j \sigma^2}{(1-\phi^2) \sigma^2} = \phi^j$$

$$\rho_j = \phi^j$$

→ memória de um processo autorregressivo de 1ª ordem

$$\text{Ex: } Y_t = 2 + 0,5 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2) \quad \sigma^2 = 0,3$$

$$\mu = \frac{c}{1-\phi} = \frac{2}{1-0,5} = 4$$

$$V(Y_t) = \frac{1 \sigma^2}{1-\phi^2} = \frac{0,3}{1-0,5^2}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{1-\phi^2} \sigma^2 = V(Y_t) = 0,4$$

$$\gamma_1 = \frac{\phi^1}{1-\phi^2} \sigma^2 = \frac{0,5}{1-0,5^2} \cdot 0,3 = 0,2$$

$\uparrow \phi \downarrow \gamma_j$

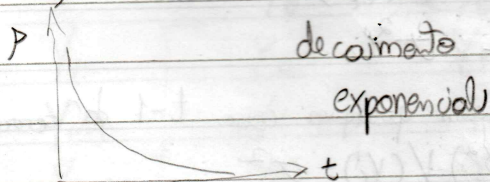
$$\gamma_2 = \frac{\phi^2}{1-\phi^2} \sigma^2 = \frac{0,5^2}{1-0,5^2} \cdot 0,3 = 0,1$$

$$\rho_j = \phi^j$$

$$\rho_0 = 1 \quad \rho_1 = \phi = 0,5$$

$$\rho_2 = \phi^2 = 0,25$$

$$\rho_3 = \phi^3 = 0,125$$



Exercício $Y_t = 1 - 0.5 Y_{t-1} + 0.4 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$
 $\sigma^2 = 0.3$ Y_t estacionário $E(Y_t) = ?$ $Var(Y_t) = ?$

26/03

$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ Y_t estacionário
 $\mu = \frac{c}{1-\phi}$ $V(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$
 $E(Y_t) = E(c) + \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$
 $\mu = c + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu$

$$\mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2}$$

$$V(Y_t) = V(c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$V(K+X) = V(X) \quad V(Y_t) = V(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

Supõe-se a constante zero por conveniência $\Rightarrow E(X) = 0 \Rightarrow V(X) = E(X^2)$

$$V(Y_t) = E[(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)^2]$$

$V(Y_t) = E[\phi_1^2 Y_{t-1}^2 + \phi_1 \phi_2 Y_{t-1} Y_{t-2} + \phi_1 Y_{t-1} \varepsilon_t + \phi_1 \phi_2 Y_{t-1} Y_{t-2} + \phi_2^2 Y_{t-2}^2 + \phi_2 Y_{t-2} \varepsilon_t + \phi_1 Y_{t-1} \varepsilon_t + \phi_2 Y_{t-2} \varepsilon_t + \varepsilon_t^2]$
 zero sempre que há alguma relação com algo não contemporâneo

$$V(Y_t) = \phi_1^2 E(Y_{t-1}^2) + \phi_1 \phi_2 E(Y_{t-1} Y_{t-2}) + \phi_1 \phi_2 E(Y_{t-1} Y_{t-2}) + \phi_2^2 E(Y_{t-2}^2) + \sigma^2$$

$$E(Y_{t-1}^2) = V(Y_{t-1}) = V(Y_t)$$

$$V(Y_t) = \phi_1^2 V(Y_t) + \phi_2^2 V(Y_t) + 2 \phi_1 \phi_2 E(Y_{t-1} Y_{t-2}) + \sigma^2$$

$$E(Y_{t-1} Y_{t-2}) = \text{cov}(Y_{t-1}, Y_{t-2}) = \gamma_1$$

$$V(Y_t) = \gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + 2 \phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \sigma^2$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) = \gamma_j = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] \quad c=0 \Rightarrow E(X) = \mu = 0$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) = E(Y_t Y_{t-j}) = \gamma_j$$

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2}$$

$$\begin{cases} \gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2}, & j=1, 2, \dots \\ \gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \sigma^2, & j=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_{-1} \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{matriz simétrica } \boxed{\gamma_j = \gamma_{-j}} \quad \gamma_0 = ?$$

$$\gamma_1 = \frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2}$$

Desolito

$$\Downarrow \gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2) \sigma^2}{(\phi_2 + 1)(1 - \phi_2 - \phi_1)(1 - \phi_2 + \phi_1)}$$

$$-1 < \phi_2 < 1 \quad \phi_1 + \phi_2 < 1 \quad \phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$\gamma_j = \gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} \quad j=1, 2, \dots$$

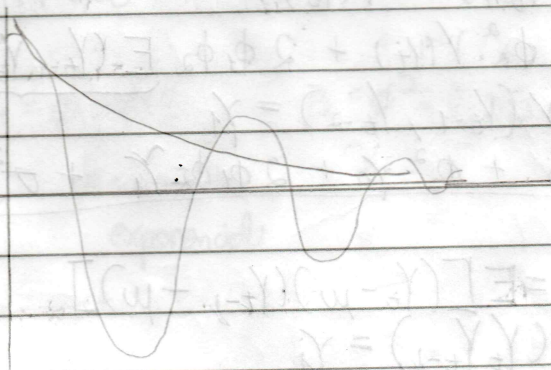
$$Y_t = 1 - 0.5 Y_{t-1} + 0.4 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2) \quad \sigma^2 = 0.3$$

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2} = \frac{1}{1 + 0.5 - 0.4} = 0.909 \quad \gamma_0 = 1.169$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1 \quad \gamma_1 = \phi_1 \gamma_{1-1} + \phi_2 \gamma_{1-2} = \phi_1 \gamma_0^{11} + \phi_2 \gamma_1 \\ \gamma_1 &= \frac{\phi_1 \gamma_0^{11}}{1 - \phi_2} = \frac{-0.5}{1 - 0.4} = -0.833 \end{aligned}$$

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_{2-1} + \phi_2 \gamma_{2-2} = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0^{11} = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 = 0.816$$

$$\gamma_3 = -0.741$$



$$\text{AR}(p) \quad Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = c + \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j} + \varepsilon_t \quad \text{AR}(p) \Rightarrow \text{segue decaimento exponencial}$$

28/03

L = operador de delaysagens

$$Y_{t-1} = L Y_t \quad L^j Y_t = Y_{t-j} \quad Y_{t-2} = L^2 Y_t \quad L^3 Y_t = Y_{t-3}$$

$$Y_{t+2} = L^{-2} Y_t$$

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi L Y_t + \varepsilon_t \quad Y_t - \phi L Y_t = \varepsilon_t \quad (1 - \phi L) Y_t = \varepsilon_t$$

$\Delta = \text{filtro}$

 $\Delta =$ filtro de série, transforma Y_t em ε_t

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_1 L Y_t + \phi_2 L^2 Y_t + \dots + \phi_p L^p Y_t + \varepsilon_t$$

$$Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \dots - \phi_p L^p Y_t = \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = \varepsilon_t$$

$$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0 \quad \text{extrai-se } p \text{ raízes do operador } (L_i)$$

 $L_i \approx$ autovaleores

Se o módulo de cada uma delas for maior que 1 ($|L_i| > 1$) o processo será estacionário

$$Y_t = 1 - 0,5 Y_{t-1} + 0,4 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(1 + 0,5 L - 0,4 L^2) = 0 \quad \Delta = 0,25 + 1,6 = 1,85$$

$$L_1 = -1,075 \quad L_2 = 2,325 \quad \text{Processo estacionário}$$

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-j})}{V(Y_t)}$$

$$\text{AR}(p) \Rightarrow \rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-p}$$

Processos de Média Móvel MA(1)

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \quad \varepsilon_t \sim \text{PB}(0, \sigma^2), \quad Y_t \text{ estacionário}$$

$$E(Y_t) = E(\mu) + E(\varepsilon_t) + \theta E(\varepsilon_{t-1}) \quad \boxed{E(Y_t) = \mu}$$

$$V(Y_t) = V(\mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}) = V(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1})$$

$$= E[(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1})^2] = E[\varepsilon_t^2 + 2\theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \theta^2 \varepsilon_{t-1}^2]$$

$$= E(\varepsilon_t^2) + 2\theta E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + \theta^2 E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

$$= \sigma^2 + 0 + \theta^2 \sigma^2$$

$$\boxed{V(Y_t) = (1 + \theta^2) \sigma^2}$$

Todo processo de média móvel é estacionário, por causa de sua função de captura processos de curto-prazo

$$\gamma_j = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] \Rightarrow \text{supõe-se } \mu = 0$$

$$\gamma_j = E(Y_t Y_{t-j})$$

$$\gamma_1 = E(Y_t, Y_{t-1}) = E[(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}), (\varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2})]$$

$$= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \theta \varepsilon_{t-1}^2 + \theta^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}]$$

$$= \theta E(\varepsilon_{t-1}^2) = \theta \sigma^2 \quad \gamma_1 = \theta \sigma^2$$

$$\gamma_2 = E(Y_t, Y_{t-2}) = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \theta \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3} + \theta \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \theta^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}]$$

$$= 0$$

$$\gamma_p = 0, \quad p \geq 2 \Rightarrow \text{memória desaparece muito rápido}$$

$$\gamma_j = \begin{cases} (1 + \theta^2) \sigma^2, & j = 0 \\ \sigma^2 \theta, & j = 1 \\ 0, & j > 1 \end{cases}$$

Ex1. $Y_t = 5 - 0,5 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad \sigma^2 = 0,3$

Média, variância, covariância (1) correlação (1)

$$\text{Ex 2: } Y_t = 5 + 1,5\varepsilon_{t-1} + 0,3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \quad \sigma^2 = 0,5$$

Média, variância, covariância(1) cov(1)

02/04

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad \theta_0 = 1 \quad \text{MA}(q)$$

$$E(Y) = E(\mu) + E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \dots + \theta_q E(\varepsilon_{t-q}) = \mu$$

$$V(Y_t) = E(Y_t^2) = E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q})^2]$$

$$= \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma^2$$

$$= (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2$$

$$\gamma_j = E(Y_t Y_{t-j})$$

$$\gamma_j = \begin{cases} (\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \theta_{j+2}\theta_2 + \dots + \theta_q \theta_{q-j}) \sigma^2, & j \leq q \\ 0, & \text{se } j > q \end{cases}$$

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$$

Processo de média móvel invertível se eu consigo reescrevê-lo como um processo autorregressivo infinito.

$$\text{MA}(q) = \text{AR}(\infty)$$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \phi_1 L Y_t + \phi_2 L^2 Y_t + \dots + \phi_p L^p Y_t + \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = \varepsilon_t \quad |L| > 1 \Rightarrow \text{esta condição}$$

$$|\phi(L)| > 1 \Rightarrow \text{invertível}$$

$$Y_t = \bar{Y} + Y(t)$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta L \varepsilon_t = (1 + \theta L) \varepsilon_t$$

$$(1 + \theta L)^{-1} Y_t = \varepsilon_t$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \theta_2 L^2 \varepsilon_t + \dots + \theta_q L^q \varepsilon_t$$

$$Y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

θ_L

$$Y_t = \theta(L) \varepsilon_t$$

$$\theta(L)^{-1} Y_t = \varepsilon_t \quad \text{MA}(q)$$

$$\phi(L) Y_t = \varepsilon_t \quad \text{AR}(p)$$

$$(1 + \theta L)^{-1} = (1 - \theta L + \theta^2 L^2 - \theta^3 L^3 + \dots) \Rightarrow \text{válida}$$

$$A=B \quad \frac{A}{B}=1 \quad AB^{-1}=1$$

Previsamos provar que $(1 + \theta L)(1 - \theta L + \theta^2 L^2 - \theta^3 L^3 + \dots) = 1$

$$\Rightarrow = 1 + \theta L - \theta L - \theta^2 L^2 + \theta^2 L^2 + \theta^3 L^3 - \dots = 1 \quad \text{se } |\theta| < 1$$

P1) $(1 + \theta L)^{-1} = (1 - \theta L + \theta^2 L^2 - \theta^3 L^3 + \dots)$ se $|\theta| < 1$

P2) $(1 - \phi L)^{-1} = (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \dots)$ se $|\phi| < 1$

$$(1 - \phi L)(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \dots) = 1 - \phi L + \phi L - \phi^2 L^2 + \phi^2 L^2 + \dots = 1 \quad \text{se } |\phi| < 1$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \quad Y_t = (1 + \theta L) \varepsilon_t \quad (1 + \theta L)^{-1} Y_t = \varepsilon_t$$

$$|\theta| < 1 \quad (1 - \theta L + \theta^2 L^2 - \theta^3 L^3 + \dots) Y_t = \varepsilon_t$$

$$= Y_t - \theta L Y_t + \theta^2 L^2 Y_t - \theta^3 L^3 Y_t + \dots = \varepsilon_t$$

$$= Y_t - \theta L Y_{t-1} + \theta^2 Y_{t-2} - \theta^3 Y_{t-3} + \dots = \varepsilon_t$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta Y_{t-1} - \theta^2 Y_{t-2} + \theta^3 Y_{t-3} - \dots$$

AR(∞)

$$|L_i| > 1$$

(*)

AR { Estacionário se $|L_i| > 1$
Sempre Invertível

MA { Sempre Estacionário
Invertível se $|L_i| > 1$

tilibra

$$\text{MA}(q) \rightarrow \text{AR}(\infty)$$

$$\text{AR}(p) \rightarrow \text{MA}(\infty)$$

11

$$Y_t = 2 + 0,8 Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0,5 \varepsilon_{t-1} \quad \varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 = 0,3 \quad Y_t \text{ estacionário, média? Variância?}$$

04/04

$$\text{ARMA}(1,1) \quad Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$$

 Y_t estacionário

$$E(Y_t) = E(c) + \phi E(Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) + \theta E(\varepsilon_{t-1})$$

$$\mu = c + \phi \mu$$

$$\mu = \frac{c}{1-\phi}$$

 $\Rightarrow$ mesma média do AR(1)

$$V(Y_t) = E(Y_t^2) = E[(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1})^2]$$

$$= E(\phi^2 Y_{t-1}^2 + \phi Y_{t-1} \varepsilon_t + \phi Y_{t-1} \theta \varepsilon_{t-1} +$$

$$\phi Y_{t-1} \varepsilon_t + \varepsilon_t^2 + \theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} +$$

$$\theta \phi Y_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \theta^2 \varepsilon_{t-1}^2)$$

$$V(Y_t) = \phi^2 E(Y_{t-1}^2) + \phi \theta E(Y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t^2) + \phi \theta E(Y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \theta^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) \rightarrow \sigma^2$$

$$\left\{ \text{Pausa: } E(Y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = E[(\phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}) \varepsilon_{t-1}] \right.$$

$$= E(\phi Y_{t-2} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-1}^2 + \theta \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = \sigma^2$$

$$\Rightarrow V(Y_t) = \phi^2 V(Y_t) + \phi \theta \sigma^2 + \sigma^2 + \phi \theta \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2$$

$$V(Y_t) = \phi^2 V(Y_t) + \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 + 2 \phi \theta \sigma^2$$

$$= \phi^2 V(Y_t) + (1 + \theta^2 + 2 \phi \theta) \sigma^2$$

$$V(Y_t) = \frac{(1 + \theta^2 + 2 \phi \theta) \sigma^2}{1 - \phi^2}$$

$$|\phi| < 1$$

 $\Downarrow$

Estacionário

$$\text{ARMA}(p, q) \quad Y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad \theta_0 = 1$$

$$\underbrace{\phi(L)}_{\text{autorregressivo}} Y_t = \underbrace{\theta(L)}_{\text{média}} \varepsilon_t$$

$$\phi(L) \theta(L)^{-1} Y_t = \varepsilon_t$$

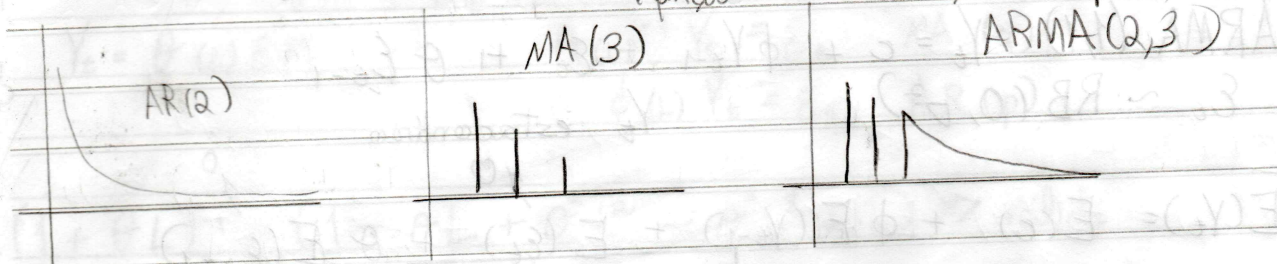
tilibra

Processo Estável: Estacionário & Invertível

Ex.: ARMA(2,3)
$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3}$$

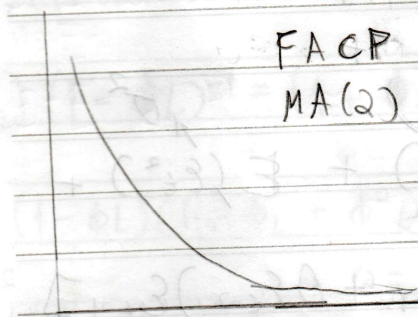
$\theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3}$

(função de autocorrelação simples)



FACP

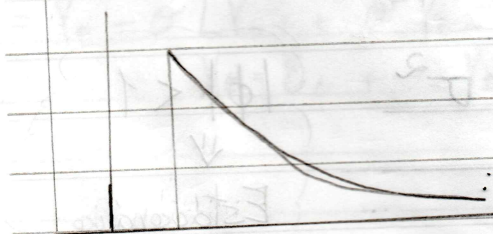
AR(2) $\Rightarrow$ Função de autocorrelação parcial (simples)



FACP
MA(2)

$$MA(q) = AR(\infty)$$

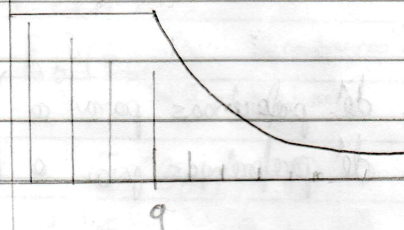
FACP = usada para descobrir a ordem p do problema
ARMA(2,3)



09/04

$$AR(p) = ARMA(p, 0) \quad \text{ou} \quad ARMA(p, q)$$

$$MA(q) = ARMA(0, q)$$

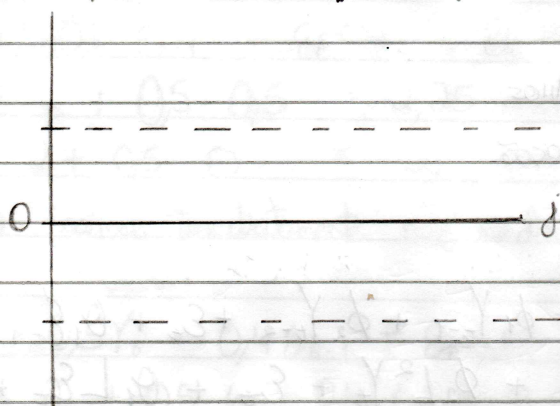


Modelo	FAC	FACP
AR(p)	Trunc	Trunc
MA(q)	Trunc, q	Trunc
ARMA(p, q)	Trunc q	Trunc

$$p = \phi'$$

$$\hat{P}_j \Rightarrow \text{simples}$$

$$\hat{P}_j^* \Rightarrow \text{parcial}$$



$$H_0: \hat{P}_j^* = 0$$

$$H_A: \hat{P}_j^* \neq 0$$

11/04

Critério de informação

 $\ln(\sigma^2)$ funciona como um pseudo- R^2
 $\downarrow \ln(\sigma^2) \uparrow$ bem-ajustado é o meu modelo

 $\varphi(t)$ é a penalidade : ai cada parâmetro adicionado aumenta $\varphi(t)$

$$\text{critério de info} \quad C = \ln(\sigma^2) + \varphi(t)$$

 $\hookrightarrow$ objetivo é minimizar o critério de informação

14

$$f(t) \Rightarrow \frac{n \ln(t)}{T} \text{ BIC} \quad \frac{n \cdot 2}{T} \text{ Akaike} \quad \frac{n \cdot 2}{T} \ln(\ln T) \text{ Hardy-Weinberg}$$

Se $n > 30$, dá preferência para o BIC (Schwarz)

Se $n < 30$, dá preferência para o Akaike

$h \rightarrow$ Horizonte de Previsão

16/04

1ª Etapa: Identificação Visual

2ª Etapa: Estabilidade

3ª Etapa: Diagnóstico dos resíduos

4ª Etapa: Critério de Informação

5ª Etapa: Previsão

Ex.: ARMA(2,2) $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$

$$Y_t = \phi_1 L Y_t + \phi_2 L^2 Y_t + \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \theta_2 L^2 \varepsilon_t$$

$$Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \theta_2 L^2 \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2) \varepsilon_t$$

$\phi(L)$

$\theta(L)$

$$\phi(L) Y_t = \theta(L) \varepsilon_t$$

$\{ H_0: \text{Sem ARCH} \}$

$\{ H_A: \text{Heteroc.} \}$

$\{ H_0: \rho_j = 0 \}$

$\{ H_A: \rho_j \neq 0 \}$

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_{t+h} = c + \phi Y_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h}$$

tilibra

15

82%

$$h=1 \quad Y_{t+1} = c + \phi Y_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$E_t(Y_{t+1}) = E_t(c + \phi Y_t + \varepsilon_{t+1})$$

$$E_t(Y_{t+1}) = c + \phi E_t(Y_t) + E_t(\varepsilon_{t+1}) \rightarrow \text{conhecemos o valor de } Y_t$$

$$E_t(Y_{t+1}) = c + \phi Y_t$$

ruído branco

$$E(\varepsilon_{t+h}) = 0$$

$$\text{Ex1: } Y_t = 2 + 0,5 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad Y_t = 5$$

$$E_t(Y_{t+1}) = 2 + 0,5 \cdot 5 + 0 = 4,5$$

$$E_t(Y_{t+2}) = 2 + 0,5 \cdot 4,5 = 4,25$$

$$E_t(Y_{t+3}) = 2 + 0,5 \cdot 4,25 = 4,13$$

$$\mu = \frac{c}{1-\phi} = \frac{2}{1-0,5} = 4 \Rightarrow \text{tende à } 4$$

$$\text{Ex2: } Y_t = 2 + 0,5 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t = 0,5$$

$$E_t(Y_{t+1}) = 2 + 0,5 \cdot 0,5 = 2,25$$

$$E_t(Y_{t+2}) = 2 + 0,5 \cdot 0 = 2 \Rightarrow \text{tende à } c$$

Se $q > h$, caímos imediatamente na média do processo

$$\text{Ex3: } Y_t = 2 + 0,5 Y_t - 0,4 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad Y_t = 10 \quad \varepsilon_t = 0,5 \quad \text{até } Y_{t+3}$$

$$E_t(Y_{t+1}) = 2 + 0,5 \cdot 10 - 0,4 \cdot 0,5 = 2 + 5 - 0,2 = 6,8$$

23/04

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$V(Y_t) < \infty$$

$$E(Y_t) = \mu \quad \forall t$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) = \delta_j \quad \forall t$$

$$V(Y_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

$$|\phi| < 1$$

$$1-\phi^2$$

$$|\phi| > 1 \quad \text{Var negativa} = \infty$$

$$|\phi| = 1 \quad \text{Var exponencial} \quad // \text{ Raiz Unitária}$$

$$Y_t = c + \phi L Y_t + \varepsilon_t$$

$$Y_t - \phi L Y_t = c + \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi L) Y_t = c + \varepsilon_t$$

$$1 - \phi L = 0 \quad 1 - L = 0 \quad L = 1 \Rightarrow \text{Raiz Unitária}$$

tilibra

$Y_t \rightarrow$ Raiz Unitária $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} \Rightarrow 1^\circ$ Diferença é Estacionária

$d \Rightarrow$ nível de diferenciação da minha série (ordem de integração)

$I(d) \Rightarrow$ nível de integração (ordem de integração)

$$Y_t \sim I(1) \Rightarrow \Delta Y_t \sim I(0)$$

ARIMA (p, d, q)

$\rightarrow$ Teste de Dickey-Fuller

Supõe $AR(1)$ $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Haverá raiz unitária se $\phi = 1$

$$t = \frac{\hat{\phi} - 1}{\sigma_{\hat{\phi}}}$$

$$H_0: \phi = 1$$

$$H_A: (\phi \neq 1) \quad \phi < 1$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \phi Y_{t-1} - Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \underbrace{(\phi - 1)}_{\alpha} Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0: \alpha = 0 \quad H_A: \alpha < 0$$

$$t = \frac{\alpha - 0}{\sigma_{\alpha}} = \frac{\alpha}{\sigma_{\alpha}} \Rightarrow \text{basta olhar a significância}$$

$\tau \Rightarrow$ distribuição t recalibrada

Generalizando agora para um $AR(p)$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad AR(p)$$

$$\alpha = -[1 - \sum \phi_i]$$

$$\begin{cases} H_0: \alpha = 0 \\ H_A: \alpha < 0 \end{cases}$$

$$P_{ind} = INT \left[12 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^{1/4} \right]; \quad T \Rightarrow \text{tamanho da amostra}$$

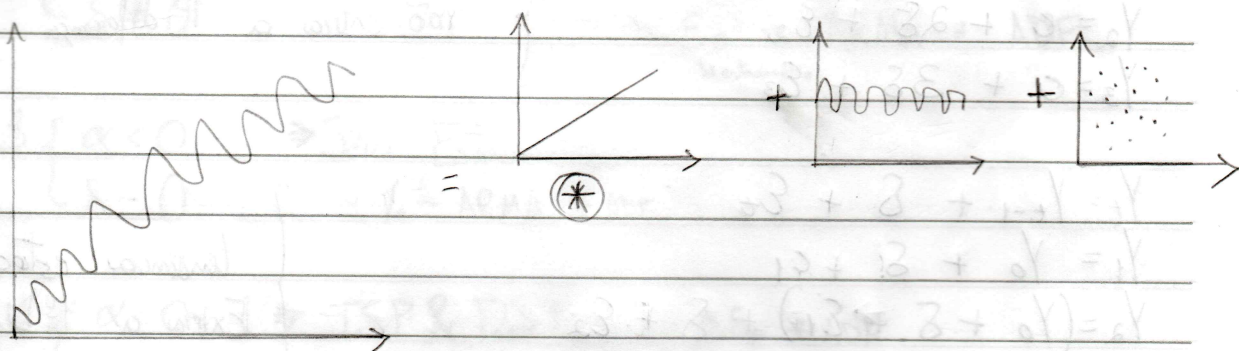
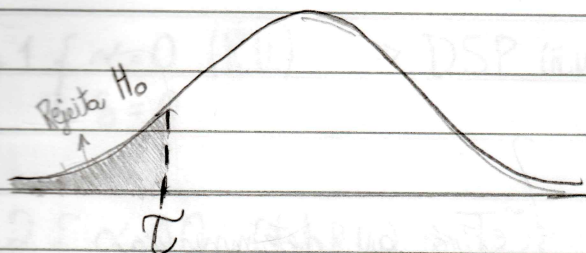
$p=5$ $\Delta Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \phi_4 Y_{t-4} + \phi_5 Y_{t-5} + \epsilon_t$
 se ϕ_5 não for significativo, tentamos um $AR(p-1)$

25/04

$$\Delta Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} \quad AR(p)$$

$$\alpha = -[1 - \sum \phi_i]$$

$$\begin{cases} H_0: \alpha = 0 & \text{Raiz Unitária} \\ H_A: \alpha < 0 \end{cases}$$



Série TSP = Trend Stationary Process

$$Y_t = c + \delta \text{ time} + \epsilon_t$$

$$\Delta Y_t = c + \delta \text{ time} + \epsilon_t - c - \delta(\text{time} - 1) - \epsilon_{t-1}$$

$$\Delta Y_t = \delta (\text{time} - \text{time} + 1) + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$$

$$= \delta + \epsilon_t - \epsilon_{t-1} \Rightarrow \text{processo de médias móveis (estacionário)}$$

$$\Delta Y_t = \delta + \epsilon_t - L \epsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \delta + \epsilon_t (1 - L) \Rightarrow \text{não invertível}$$

↳ Não posso diferenciar uma série TSP!

$$Y_t = \delta_0 + \delta_1 \text{time} + \delta_2 \text{time}^2 + \dots + \delta_n \text{time}^n + \varepsilon_t$$

Raiz unitária = Tendência Estocástica = Série DSP (Difference Stationary Process) = Passeio Aleatório = Tendência Aleatória = Caminho do Bebedor

TSP $\rightarrow t$, ARMA $\rightarrow \varepsilon_t$ (retirar tendência determinística)

DSP $\rightarrow$ ARIMA

$$Y_t = c + \delta \text{time} + \varepsilon_t$$

$$Y_1 = c + \delta + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = c + 2\delta + \varepsilon_2$$

$$Y_3 = c + 3\delta + \varepsilon_3$$

extrai a determinística
não extrai a 1ª diferença

$$Y_t = Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

$$Y_1 = Y_0 + \delta + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = (Y_0 + \delta + \varepsilon_1) + \delta + \varepsilon_2$$

$$= Y_0 + 2\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$Y_3 = Y_2 + \delta + \varepsilon_3 = Y_0 + 3\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$Y_t = Y_0 + \delta \text{Time} + \sum \varepsilon_t$$

tendência estocástica
Extrai a 1ª Diferença

P1) A série é estacionária?

P2) Se não, qual tendência ela segue?

Raiz unitária, tendência determinística ou mistura das duas

19

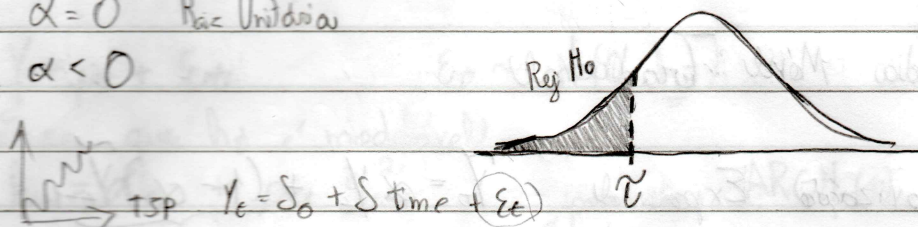
02/05

$$\alpha = \phi - 1$$

Teste DF $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$ $\Delta Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\begin{cases} H_0: \alpha = 0 & \text{Raiz Unitária} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A: \alpha < 0 \end{cases}$$



$$\Delta Y_t = \mu + \delta \text{TIME} + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Caso 1 $\begin{cases} \alpha = 0 \text{ (R.U.)} \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{DSP (R.U.)}$ $Y_t \sim \text{ARIMA}(p, 1, q)$
 $\Delta Y_t \sim \text{ARMA}(p, q) \neq \text{ADF}$

Caso 2 $\begin{cases} \alpha < 0 \text{ (sem R.U.)} \\ \delta \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{TSP} \rightarrow \text{Extração da tendência via MQO}$
 $\varepsilon_t \rightarrow \text{ARMA} \neq \text{ADF}$
Extracção

Caso 3 $\begin{cases} \alpha < 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Série Estacionária}$
 $Y_t \sim \text{ARMA} \neq \text{ADF}$

Caso 4 $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \delta \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{TSP \& DSP}$ $\Delta \varepsilon_t \neq \text{ADF}$
estacionária

Convencionou-se que primeiro extraia a determinística, depois a unitária

$$\Delta \varepsilon_t \sim \text{ARMA} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_t \sim \text{ARIMA} \quad Y_t = S_0 + \delta \text{time} + \varepsilon_t$$